Rozwiązanie i kryteria oceny piątego zadania z drugiego kolokwium

Przemysław Ohrysko

26 stycznia 2022

Niech $g(x) = 2^x f(x) - f(2x)$ będzie funkcją określoną na odcinku $[1, 2]$. Jest to funkcja ciągła, gdyż f jest ciągła z założenia, funkcja wykładnicza jest ciągła oraz działania arytmetyczne zachowują ciągłość.
Wykonujemy krótki rachunek (w drugiej części korzystamy z założenia $8f(1) = f(4)$):

$$g(1) = 2f(1) - f(2),$$

$$g(2) = 4f(2) - f(4) = 4f(2) - 8f(1) = -4g(1).$$

Jeśli $g(1) = 0$, to znaleźliśmy miejsce zerowe funkcji g i przyglądając się jej definicji dostrzegamy bez trudu, że jest to rozwiązanie zadania.
Jeśli $g(1) \neq 0$, to również $g(2) \neq 0$. Skoro $g(2) = -4g(1)$, to funkcja g w punktach 1 i 2 ma przeciwne znaki. Jako że jest to funkcja ciąga, to posiada własność Darboux, czyli istnieje punkt $x_0 \in (1, 2)$ taki, że $g(x_0) = 0$, co kończy zadanie.
Kryteria oceny (za co odejmowałem punkty):

1. Brak uzasadnienia, że g jest ciągła lub niepełne uzasadnienie (samo stwierdzenie, że f jest ciągła nie wystarczy): -1 punkt.
2. Brak stwierdzenia, że g jest ciągła, czyli brak uzasadnienia, iż g ma własność Darboux: -2 punkty.
3. Brak powołania się na własność Darboux i/lub stwierdzenie, że z $g(1)+4g(2) = 0$ wynika teza bez dodatkowych wyjaśnień: -2 punkty.
4. Blef w rozwiązaniu - sytuacja, gdy jakimś cudem wyszło piszącemu $g(1) + g(2) = 0$. Nie uważam tego za błąd rachunkowy tylko za próbą dopasowania zadania do schematu: -6 punktów.
5. Drobne błędy rachunkowe i/lub wątpliwe sformułowania: -1 lub -2 punkty w zależności od sytuacji.