Klasówka.

1. Dany jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ o wyrazach zespolonych.

1. Podać definicję zbieżności szeregu liczbowego $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.
2. Sformułować i udowodnić warunek konieczny zbieżności tego szeregu.
3. Wykazać, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny.

Rozwiązanie zadania 1.

1. Szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $z_0 \in \mathbb{C}$, że $z_0 = \lim_{n\to\infty} (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)$.

2. Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, bo $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} ((z_1 + z_2 + \ldots + z_n) - (z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1})) = z_0 - z_0 = 0$.

3. Wynika to z warunku Cauchy'ego i nierówności (trójkąta):

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+k}| \leqslant |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \ldots + |z_{n+k}|,$$

więc jeśli szereg jest bezwzględnie zbieżny, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba n_ε, że jeśli $n > n_\varepsilon$ i $k \in \mathbb{N}$, to $|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \ldots + |z_{n+k}| < \varepsilon$, więc $|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+k}| < \varepsilon$. $\square$

Rozwiązanie zadania 2.

Zbadać zbieżność zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{7 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} - \sqrt{7 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \right)^{\alpha}.$$

Zachodzi równość $\sqrt{7 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} - \sqrt{7 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \frac{\frac{2}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{7+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}+\sqrt{7-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}}$. Granicą mianownika jest liczba $2\sqrt{7} \in (0, \infty)$, więc zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{7 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} - \sqrt{7 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \right)^{\alpha}$ równoważna jest zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^\alpha}}$, który jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha > 3$. $\square$

Rozwiązanie zadania 3.

Zbadać zbieżność i bezwzględną zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\sqrt[n]{7^{\sqrt{n}-1}} - 1 \right).$$

Mamy $\sqrt[n]{7^{\sqrt{n}-1}} - 1 = 7^{(\sqrt{n}-1)/n} - 1$ i dalej $\frac{\sqrt{n}-1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$. Mamy też $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ – wynika to z równości $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ oraz nierówności $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$. Dla $n \geqslant 4$ zachodzi nierówność $\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$, więc ciąg o wyrazie $\sqrt[n]{7^{\sqrt{n}-1}} - 1$ jest malejący od czwartego wyrazu począwszy. Sumy częściowe szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, to kolejno $-1, -2, -1, 0, -1, -2, -1, 0, -1, -2, -1, 0, \ldots$, więc tworzą one ciąg ograniczony. Oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{\sqrt{n}-1}} - 1 = 0$. Stosując kryterium Dirichleta stwierdzamy zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\left(\sqrt[n]{7^{\sqrt{n}-1}} - 1\right)$.

Równość $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$ zachodzi dla każdego $a > 0$, a wynika z tego, że $a^x = e^{x\ln a}$ oraz $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t} = 1$. Z niej wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{7^{\sqrt{n}-1}}-1}{(\sqrt{n}-1)/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^{(\sqrt{n}-1)/n}-1}{(\sqrt{n}-1)/n} = \ln 7 \in (0,\infty)$. Z asymptotycznego kryterium porównawczego wynika więc, że szereg $\sum\left(7^{(\sqrt{n}-1)/n}-1\right)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum\frac{\sqrt{n}-1}{n}$, który jest rozbieżny, bowiem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\sqrt{n}-1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$.

Rozwiązanie zadania 4.

Obliczyć granice

$$\textbf{(a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x^2)-1}{\ln(1+2x^4)}, \qquad\qquad \textbf{(b)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{3^x-3^{x^2}}{\sin(\pi x)}$$

lub wykazać, że jedna lub obie nie istnieją.

(a) Mamy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(3x^2)-1}{\ln(1+2x^4)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(3x^2)-1}{(3x^2)^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^4}{\ln(1+2x^4)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{9x^4}{2x^4} = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{9}{2} = -\frac{9}{4}$, bowiem $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$ oraz $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos t-1}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos^2 t-1}{t^2(\cos t+1)} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\sin^2 t}{t^2(\cos t+1)} = -\dfrac{1}{2}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^x-3^{x^2}}{\sin(\pi x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{t+1}-3^{(t+1)^2}}{\sin(\pi(t+1))} = 3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^t-3^{2t+t^2}}{-\sin(\pi t)} = 3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^t-1}{t}\cdot\dfrac{t}{-\sin(\pi t)} -$
$-3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2t+t^2}-1}{2t+t^2}\cdot\dfrac{2t+t^2}{t}\cdot\dfrac{t}{-\sin(\pi t)} = -3\cdot\ln 3\cdot\dfrac{2}{\pi} - 3\cdot\ln 3\cdot 2\cdot\dfrac{2}{\pi} = -\dfrac{18\cdot\ln 3}{\pi}$, bo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$ m.in. dla $a=3$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ oraz $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Rozwiązanie zadania 5.

Załóżmy, że funkcja $f\colon [1,4]\longrightarrow\mathbb{R}$ jest ciągła i spełnia warunek $f(4) = 8f(1)$. Dowieść, że istnieje taka liczba $x\in[1,2]$, że $2^x f(x) = f(2x)$.

Niech $g(x) = 2^x f(x) - f(2x)$. g jest ciągła. $g(1) = 2f(1) - f(2)$, $g(2) = 4f(2) - f(4) = 4(f(2) - 2f(1))$. Wynika stąd, że jeśli $g(1)\neq 0$, to liczby $g(1)$ i $g(2)$ mają różne znaki. Funkcja g jest ciągła, więc jeśli w jednym punkcie przedziału jest dodatnia, a w drugim – ujemne, to w jakimś punkcie pomiędzy nimi jest równa 0 – twierdzenie Bolzano–Cauchy'ego o przyjmowaniu wartości pośrednich, a właśnie to chcieliśmy udowodnić. $\square$

Rozwiązanie zadania 6.

Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^a+\sin n}$$

w zależności od parametru $a > 0$.

Zaczniemy od zbieżności bezwzględnej. Mamy $\frac{1-\cos(2n)}{2(n^a+1)} \leqslant \frac{\sin^2 n}{n^a+\sin n} \leqslant \left|\frac{\sin n}{n^a+\sin n}\right| \leqslant \frac{|\sin n|}{n^a+\sin n} \leqslant \frac{1}{n^a-1}$.

Zachodzą równości $\cos 2 + \cos 4 + \ldots \cos(2n) = \Re(e^{2i} + e^{4i} + \ldots + e^{2ni}) = \Re\left(e^{2i}\frac{1-e^{2ni}}{1-e^{2i}}\right)$. Stąd $|\cos 2 + \cos 4 + \ldots \cos(2n)| \leqslant \left|\Re\left(e^{2i}\frac{1-e^{2ni}}{1-e^{2i}}\right)\right| \leqslant \left|e^{2i}\frac{1-e^{2ni}}{1-e^{2i}}\right| \leqslant \frac{2}{|1-e^{2i}|}$, co dowodzi ograniczoności ciągu sum częściowych szeregu o wyrazie $\cos(2n)$. Wobec tego szereg $\sum \frac{\cos(2n)}{2(n^a+1)}$ jest zbieżny – kryterium Dirichleta. Z pierwszego oszacowania wynika, że szereg $\sum \left|\frac{\sin n}{n^a+\sin n}\right|$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum \frac{1}{n^a}$ jest zbieżny, czyli dla $a > 1$.

A teraz zajmiemy się zbieżnością szeregu $\sum \frac{\sin n}{n^a+\sin n}$. Zaczniemy od uproszczenia sobie życia: $\sum \frac{\sin n}{n^a} - \sum \frac{\sin n}{n^a+\sin n} = \sum \frac{\sin^2 n}{n^a(n^a+\sin n)}$. Rozumując dokładnie tak jak poprzednio stwierdzamy, że szereg (o wyrazach dodatnich) $\sum \frac{\sin^2 n}{n^a(n^a+\sin n)}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $a > \frac{1}{2}$. Znów tak jak poprzednio rzecz sprowadza się do zbadania zbieżności szeregu $\sum \frac{\sin n}{n^a}$. Mamy $|\sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n| = \left|e^i\frac{1-e^{ni}}{1-e^i}\right| \leqslant \frac{2}{|1-e^i|}$, więc sumy częściowe szeregu $\sum \sin n$ są ograniczone, a zatem szereg $\sum \frac{\sin n}{n^a}$ jest zbieżny dla każdego $a > 0$. Oznacza to, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^a+\sin n}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $a > \frac{1}{2}$.

Uwaga 1. Liczby e^i oraz e^{2i} są różne od 1, bo np. $e^{2i} = 1 + 2i - \frac{4}{2!} - \frac{8i}{3!} +$. Wystarczy sprawdzić, że suma szeregu $1 - \frac{4}{2!} + \frac{4^2}{4!} - \frac{4^3}{6!} + \ldots$ jest różna od zera. Zapiszmy ciąg nierówności $\frac{4^2}{4!} > \frac{4^3}{6!} > \ldots$. Z dowodu kryterium Leibniza wynika, że $1 - \frac{4}{2!} + \frac{4^2}{4!} - \frac{4^3}{6!} + \ldots < 1 - \frac{4}{2!} + \frac{4^2}{4!} = -\frac{1}{3}$. Wobec tego część rzeczywista liczby e^{2i} jest ujemna, co dowodzi tego, że $e^{2i} \neq 0$. $\square$

121. Niech C oznacza zbiór Cantora (elementami C są te liczby z przedziału $[0,1]$, które można zapisać w układzie trójkowy nie używając cyfry 1). Dowieść, że każda funkcja ciągła $g\colon [0,1] \longrightarrow C$ jest stała.

122. Podać przykład ograniczonej funkcji ciągłej określonej na półprostej $[0,\infty)$, która nie jest jednostajnie ciągła.

123. Podać przykład ograniczonej funkcji ciągłej $f\colon (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest jednostajnie ciągła. *do napisania.*

124. Dowieść, że jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym (tzn. jego dopełnienie do $\mathbb{R}$ jest sumą pewnej rodziny przedziałów otwartych) , to każda funkcja ciągła $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona, osiąga swe kresy i jest jednostajnie ciągła.

125. Dowieść, że jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem, który nie zawiera choćby jednego swego skończonego punktu skupienia, to istnieje funkcja ciągła $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie jest ograniczona ani z góry ani z dołu i nie jest jednostajnie ciągła.

126. Dowieść, że jeśli każda funkcja ciągła $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ ma własność przyjmowania wartości pośrednich, tzn. jeśli liczba C znajduje się między liczbami $f(x)$ i $f(y)$, to istnieje takie $c \in A \cap (x,y)$, że $C = f(c)$, to zbiór A jest przedziałem.

127. Dowieść, że każda funkcja wypukła $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Podać przykład funkcji wypukłej $f\colon [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, która ma punkt nieciągłości.

128. Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest nieciągła w punkcie 0 i ma własność Darboux (przyjmowania wartości pośrednich). *do napisania.*

129. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła, $a, b \in \mathbb{R}$, to można tak zdefiniować $f(a)$ i $f(b)$, by funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ była ciągła w całym przedziale $[a,b]$.

130. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $f(x) = x^a$ jest jednostajnie ciągła?

131. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja $f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $f(x) = x^a$ jest jednostajnie ciągła?

132. Dla jakich przedziałów $(a,b) \subseteq (0,\infty)$ funkcja $\ln\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła?

133. Dla jakich przedziałów $(a,b) \subseteq (0,\infty)$ funkcja $\sin\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła?

134. Dla jakich przedziałów $(a,b) \subseteq (0,\infty)$ funkcja $\mathrm{tg}\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła?

135. Dla jakich przedziałów $(a,b) \subseteq (-\infty,\infty)$ funkcja $\exp\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła? *do napisania.*

136. Czy suma dwu funkcji jednostajnie ciągłych na przedziale P musi być jednostajnie ciągła?

137. Czy iloczyn dwu funkcji jednostajnie ciągłych na przedziale P musi być jednostajnie ciągły?

138. Czy złożenie dwu funkcji jednostajnie ciągłych musi być jednostajnie ciągłe?

139. Czy funkcja odwrotna do funkcji jednostajnie ciągłej musi być jednostajnie ciągła?

140. Podać przykład funkcji ciągłej $f\colon (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, która jest ograniczona z góry i z dołu, ale nie ma ani wartości najmniejszej, ani największej.

141. Czy istnieje jednostajnie ciągła funkcja, która przekształca półprostą $(1,\infty)$ **na** prostą $(-\infty,\infty)$?

142. Czy istnieje różnowartościowa, jednostajnie ciągła funkcja, która przekształca półprostą $(1,\infty)$ **na** prostą $(-\infty,\infty)$? *do napisania.*

143. Niech $f(x) = 1 - 2|x|$ i $f_n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ liter } f}$. Ile rozwiązań w przedziale $[-1,1]$ ma równanie $f_n(x) = x$? *do napisania.*