Zadanie 4 z drugiego kolokwium

Obliczyć granice

$$\textbf{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x^2)-1}{\ln(2x^4+1)}, \qquad \textbf{(b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{3^x - 3^{x^2}}{\sin(\pi x)},$$

lub wykazać, że granice nie istnieją.

Rozwiązanie.
a) Przekształcimy wyrażenie tak, żeby rozpoznać znane granice

$$\lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1}{y^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = 1.$$

Otrzymujemy

$$\frac{\cos(3x^2)-1}{\ln(2x^4+1)} = \frac{\cos(3x^2)-1}{9x^4} \cdot \frac{9x^4}{\ln(2x^4+1)} = \frac{\cos(3x^2)-1}{9x^4} \cdot \frac{2x^4}{\ln(2x^4+1)} \cdot \frac{9}{2}$$
$$\to -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{9}{2}.$$

Skoro x zbiega do zera, to $3x^2$ oraz $2x^4$ również. Szukana granica wynosi $-\frac{9}{4}$.

b) W tym przykładzie wykorzystamy znajomość następujących granic

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Po wyciągnięciu 3^x przed nawias w liczniku, dostaniemy $3^x(1-3^{x^2-x})$ (z żalem odnotowuję, że niepoprawne działania na potęgach były naprawdę częstym źródłem błędów). Gdy x zbiega do 1, to x^2-x zbiega do zera, zatem

$$\alpha_x := \frac{1-3^{x^2-x}}{(x^2-x)\ln 3} = \frac{1-e^{(x^2-x)\ln 3}}{(x^2-x)\ln 3} \to -1.$$

Wyrażenie którego granicę liczymy ma więc postać

$$3^x \cdot \alpha_x \cdot \frac{x(x-1)\ln 3}{\sin(\pi x)},$$

pozostaje nam rozpoznać asymptotykę $\sin \pi x$ przy $x \to 1$. W tym celu zauważamy, że

$$\sin(\pi(x-1)) = -\sin(\pi - \pi x) = -\sin \pi x.$$

Zatem

$$\beta_x := \frac{x(x-1)\ln 3}{\sin(\pi x)} = -x\frac{\ln 3}{\pi} \cdot \frac{\pi(x-1)}{\sin(\pi(x-1))} \to -1 \cdot \frac{\ln 3}{\pi} \cdot 1.$$

Granica całego wyrażenia $3^x \cdot \alpha_x \cdot \beta_x$ przy $x \to 1$ jest zatem równa $\frac{3\ln 3}{\pi}$.

Ocenianie. Popdunkt a): W sumie 4 punkty, 2 za poradzenie sobie z granicą z logarytmem, 2 za poradzenie sobie z granicą z cosinusem. Podpunkt b): W sumie 6 punktów, 3 za granicę z sinusem, 3 za granicę z funkcją wykładniczą. Za drobne błędy rachunkowe w obu przykładach odejmowałam 0, 0.5 lub 1 punkt (w zależności od konsekwencji tego błędu dla metody rozwiązania).

Najczęstsze błędy.

- Działania na potęgach ($3^x \cdot 3^x \neq 3^{x^2}$).
- Twierdzenie że $\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ wynosi 1 (nie jest to prawda, ta granica wynosi 0, licznik zbiega do zera, mianownik do π).
- Zapominanie o minusie przy stosowaniu wzoru redukcyjnego przy sinusie.